

УДК 551.466

© А. А. Куркин¹, С. В. Семин¹, Ю. А. Степаныц^{1,2}

¹Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева, Россия

²Университет Южного Квинсленда, Тувумба, Австралия

Yury.Stepanyants@usq.edu.au

Трансформация поверхностных и внутренних волн над донным уступом. Обзор

Представлен краткий обзор работ по трансформации поверхностных и внутренних гравитационных волн над донным уступом. Обсуждается обобщение известных формул Лэмба для расчета коэффициентов трансформации, полученных в длинноволновом приближении, на случай волн произвольной длины в жидкости конечной глубины. Дано описание строгого подхода к расчету коэффициентов трансформации в линейном приближении как для поверхностных, так и для внутренних волн в двухслойной жидкости и отмечены трудности, связанные с использованием этого подхода. Рассмотрены различные приближенные подходы и их соответствие строгой теории, а также экспериментальным и численным данным. В рамках строгого подхода приведены расчеты не только коэффициентов трансформации бегущих волн, но также и коэффициентов возбуждения прижатых к уступу волн. Найдено, что длина несущей волны узкополосного пакета после прохождения над уступом изменяется пропорционально фазовой скорости, а длина огибающей изменяется пропорционально групповой скорости. Представлено сравнение теоретических результатов с численными данными и лабораторными экспериментами.

Ключевые слова: волны на воде, внутренние волны, трансформация волн, коэффициент прохождения, коэффициент отражения, волновой пакет, трансформация волн на шельфе.

A. A. Kurkin¹, S. V. Semin¹, Y. A. Stepanyants^{1,2}

¹Nizhny Novgorod State Technical University, Russia

²University of Southern Queensland, Toowoomba, Australia

Yury.Stepanyants@usq.edu.au

Transformation of Surface and Internal Waves Over the Bottom Step. Review

A brief overview of works on transformation of surface and internal gravity waves over a bottom step is presented. The generalization of Lamb formulae for the transformation coefficients derived in the long-wave approximation is discussed for waves of arbitrary length in the fluid of a finite length. The rigorous approach to calculation of transformation coefficients in the linear approximation is described both for the surface and internal waves in two-layer fluid. The problems associated with the application of the rigorous approach are noticed. The various approximate approaches are considered, as well as their compliance with the rigorous theory and numerical and experimental results. Within the framework of the rigorous approach the transformation coefficients of travelling waves and the excitation coefficients of evanescent modes are calculated. It is shown that wavelength of a quasi-monochromatic wavetrain changes after transformation on a bottom step proportionally to the phase speed, whereas the length of the envelope changes proportionally to the group speed. Comparison of theoretical results with numerical data and laboratory experiments is presented.

Key words: water waves, internal waves, wave transformation, transmission coefficient, reflection coefficient, wave packet, waves transformation on the shelf.

Проблема трансформации поверхностных волн над донным уступом возникла достаточно давно [1]; интерес к ней обусловлен как с теоретической, так и с практической точек зрения. Известно, что при распространении волн из открытого океана к берегу им обычно приходится преодолевать зону шельфа, в которой происходит относительно резкое изменение глубины океана. Подобного же рода резкий подъем дна часто наблюдается и в менее глубоких прибрежных зонах морей и океанов, а также в озерах, реках и водохранилищах. При прохождении волны над донным уступом происходит ее трансформация с образованием прошедшей и отраженной волн. При этом амплитуда прошедшей волны может до двух раз превышать амплитуду падающей. Аналогичные явления, связанные с трансформацией внутренних волн, также привлекают к себе внимание исследователей в последние годы [2]. Большой вклад в изучение трансформации как поверхностных, так и внутренних уединенных волн был внесен Е. Н. Пелиновским, который одним из первых рассчитал трансформацию солитонов Кортевега—де Вриза (КдВ) на подводном уступе [3].

Для оценки возможного воздействия прошедшей волны на морские инженерные сооружения, платформы, нефте- и газопроводы, а также на пляжи, порты, берегозащитные сооружения и суда необходимо знать как можно точнее параметры прошедших волн. Данная проблема, как отмечено выше, представляет также определенный академический интерес, поскольку, несмотря на относительную простоту постановки задачи, ее решение до последнего времени не было представлено в полном объеме, хотя к данному времени уже накопилось довольно много теоретических, экспериментальных и численных работ, посвященных расчету коэффициентов трансформации поверхностных и внутренних волн в рамках тех или иных приближений.

На рис. 1 схематично представлен процесс трансформации волн на подводном уступе. Пусть квазимонохроматический волновой пакет с заданной частотой ω , волновым числом k_i и амплитудой A_i распространяется из области 1 с глубиной h_1 в область 2 с глубиной h_2 . В результате его трансформации на подводном уступе при $x = 0$ возникают прошедший волновой пакет с волновым числом k_t и амплитудой A_t и отраженный пакет с волновым числом k_r таким же, как и в падающем

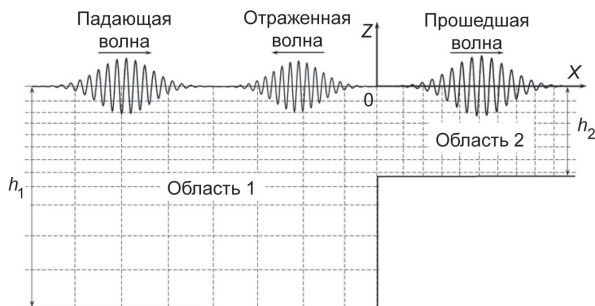


Рис. 1. Схема расчетной области.

пакете, и амплитудой A_r . При этом частота волны остается неизменной. Характерные длины волновых пакетов $D_{i,t}$ предполагаются значительно превосходящими длины несущих волн $\lambda_{i,t} = 2\pi/k_{i,t}$ так, что пространственные спектры волновых пакетов являются достаточно узкими.

Ниже дадим описание задачи об определении параметров трансформированных волн в зависимости от амплитуды и длины волны набегающего пакета, а также от величины перепада глубин в рамках линейной теории.

Далее мы опишем используемые подходы к задаче определения параметров трансформированных волн в зависимости от амплитуды, волнового числа и длины набегающего волнового пакета, а также от величины перепада глубин. Представлены результаты, полученные в рамках как линейной теории, так и нелинейной.

Трансформация поверхностных волн на донном уступе

Линейные теории. Первые теоретические результаты по трансформации поверхностных волн над донным уступом, по-видимому, были опубликованы Лэмбом в его известной монографии [1]. Из простых физических соображений им были выведены в длинноволновом приближении коэффициенты трансформации для волн бесконечно малой амплитуды в канале прямоугольного сечения с резким изменением глубины и ширины. Используя условия непрерывности давления, а также равенства потоков жидкости слева и справа от уступа, он получил выражения для коэффициентов трансформации, которые теперь известны как формулы Лэмба:

$$T \equiv \frac{A_t}{A_i} = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}, \quad R \equiv \frac{A_r}{A_i} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad (1)$$

где A_i — амплитуда смещения свободной поверхности в набегающей волне, а A_t и A_r — амплитуды прошедшей и отраженной волн соответственно, c_1 и c_2 — скорости распространения длинных волн перед уступом и за ним (здесь формулы Лэмба приведены для канала постоянной ширины).

Подставляя в (1) известные выражения для скорости распространения длинных волн в линейном приближении [1, 4, 5] $c = \sqrt{gh}$, можно получить коэффициенты трансформации, зависящие только от соотношения глубин до и после уступа:

$$T = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}, \quad R = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}. \quad (2)$$

Вывод формул (2), приведенный Лэмбом, впоследствии подвергался критике в виду того, что при их выводе пренебрегалось вертикальной компонентой скорости в волне, что не справедливо в области донного уступа. Строгая постановка задачи о трансформации поверхностных волн произвольной длины на уступе в линейном приближении была впервые предложена в работе Бартоломеуша [6], в которой автор учел граничные условия с обращением в ноль нормальной компоненты скорости на всех твердых поверхностях. При такой постановке задачи в районе уступа волновое поле состоит как из распространяющихся волн (падающей, прошедшей и отраженной), так и из бесконечного числа не распространяющихся прижатых к уступу мод, экспоненциально спадающих в обе стороны с увеличением расстояния от него. Сшивая решения по обе стороны от уступа, Бартоломеуш свел задачу расчета коэффициентов трансформации к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Однако решение выведенного уравнения ему удалось получить только в пределе бесконечно длинных волн, что привело к тем же формулам Лэмба (2), подтвердив их справедливость в этом пределе. В общем же случае для волн произвольной длины коэффициенты трансформации в его работе получены не были. Позднее аналогичные результаты были получены в работе Жермена 1984 г. [7].

Попытка расчета коэффициентов трансформации для волн конечной длины была предпринята ранее в работе Крылова 1949 г. [8] (см. ее изложение в монографии Сретенского [4]) для случая, когда длина набегающей волны много меньше глубины области ($k_i h_1 \gg 1$), так что эту область можно считать бесконечно глубокой. Используя теорию аналитических функций комплексного переменного и метод конформного преобразования, Крылов вывел следующие асимптотические формулы для коэффициентов трансформации:

— для набегающих волн коротких по сравнению с глубиной над уступом ($k_i h_2 \gg 1$):

$$T \approx 1 - \frac{1}{2} \exp(-4k_i h_2), \quad R \approx \exp(-2k_i h_2); \quad (3)$$

— для набегающих волн длинных по сравнению с глубиной над уступом ($k_i h_2 \ll 1$):

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\ln(2/k_i h_2)}{\delta} \right]^2}}, \quad R \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\delta}{\ln(2/k_i h_2)} \right]^2}}. \quad (4)$$

Зависимости коэффициентов трансформации от безразмерного волнового числа $k_i h_2$ набегающей волны, построенные по этим формулам, показаны на рис. 2.

Кривые 1—4, построенные по асимптотическим формулам (3) и (4), становятся не справедливы в окрестности $k_i h_2 = 1$. При этом в области $k_i h_2 > 1$ кривые 1 и 2 очень быстро приближаются к своим предельным значениям 1 и 0 соответственно. По существу, эти формулы означают, что при трансформации коротких волн над подводным уступом происходит лишь незначительное их отражение, в основном же волна практически полностью проходит в область за уступом. В случае же длинных волн наблюдается обратная картина, т. е. происходит практически полное отражение волн от уступа и лишь малая их часть проходит в область за уступом. В количественном отношении, однако, коэффициент прохождения для длинных волн спадает с уменьшением волнового числа довольно медленно (см. кривую 3 на рис. 2). Так, даже для значений $k_i h \sim 10^{-4}$ коэффициент прохождения $T \approx 0.3$.

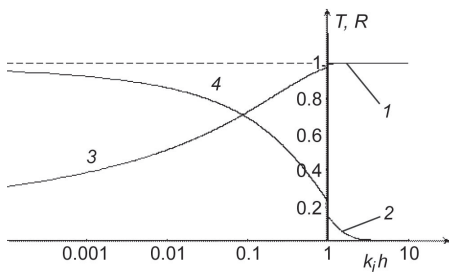


Рис. 2. Графики зависимостей коэффициентов трансформации согласно формулам (3) и (4).

1 — коэффициент прохождения T при $k_i h_2 \gg 1$; 2 — коэффициент отражения R при $k_i h_2 \gg 1$; 3 — коэффициент прохождения T при $k_i h_2 \ll 1$; 4 — коэффициент отражения R при $k_i h_2 \ll 1$.

Существенный прогресс в расчет коэффициентов трансформации поверхностных волн был внесен Такано [9, 10], который представил волновое поле в области уступа в виде суперпозиции бегущих и прижатых мод и, пользуясь ортогональностью этих мод, свел задачу о нахождении коэффициентов трансформации к решению системы из бесконечного числа алгебраических уравнений относительно коэффициентов прохождения и отражения распространяющихся волн, а также коэффициентов возбуждения прижатых мод. Благодаря тому, что абсолютное значение коэффициентов возбуждения прижатых мод убывает с ростом их номера, бесконечную систему уравнений можно ограничить конечным числом мод и получить приближенное решение, точность которого зависит от числа учтенных мод. Подобный подход был использован в дальнейшем различными авторами [11—14, 37]. В этих работах число учитываемых мод достигало 80, однако точность расчетов коэффициентов трансформации не контролировалась, сходимость решений не рассматривалась, а коэффициенты возбуждения прижатых мод не вычислялись. Эти пробелы были отчасти восполнены в работе [15], в которой число мод при расчетах доходило до 500. Кроме того, было показано, что число мод, необходимых для достижения определенной точности, зависит от перепада глубин h_2/h_1 . Там же были рассчитаны коэффициенты возбуждения прижатых мод и показано их влияние на сшивку волновых полей в области перепада глубин (см. ниже).

Задачу о трансформации поверхностных волн над донным уступом рассматривал также Ньюэн в 1960-х гг. В работе [16] он получил общие условия симметрии для коэффициентов трансформации волн:

$$|R_r| = |R_l| \equiv R, \quad |T_r T_l| = 1 - R^2, \quad (5)$$

где R_r, T_l — коэффициенты трансформации при набегании волны слева на уступ, как показано на рис. 1 (так что $h_2/h_1 < 1$), а R_r, T_r — коэффициенты трансформации при распространении волны в обратном направлении (так что $h_2/h_1 > 1$). Отметим, что первое из соотношений (1.5) для коэффициентов отражения было выведено еще Крейселем в 1949 г. [17]. Коэффициенты трансформации, вообще говоря, являются комплексными величинами, что отражает тот факт, что при трансформации волны меняются не только амплитуды прошедшей и отраженной волн, но и их фазы. Для фаз волн Ньюэном также были выведены соотношения симметрии:

$$\arg T_r = \arg T_l \equiv \delta T, \quad \arg R_r + \arg R_l \equiv \pi + 2\delta T. \quad (6)$$

Затем в работе [11] Ньюэн с помощью подхода, развитого в работах Бартоломеуша [6] и Такано [9, 10], по существу, впервые рассчитал коэффициенты трансформации волн для специального случая, когда область конечной глубины h_2 соседствует с областью бесконечной глубины $h_1 = \infty$. Им были получены зависимости коэффициентов трансформации волн от частоты с помощью численного решения системы из 80 уравнений, включающей как бегущие, так и прижатые к уступу моды. При этом рассматривались два случая, когда волна набегают из бесконечно глубокой области на уступ и когда волна распространяется из области конечной глубины в бесконечно глубокую область. Полученные результаты были в полном согласии с соотношениями симметрии (5) и (6) (рис. 3, б).

Особенностью задачи, рассмотренной Ньюэном, является то, что в случае бесконечно глубокой жидкости спектр прижатых мод становится непрерывным. В результате этого бесконечная сумма по всем прижатым модам заменяется интегралом в области над глубокой жидкостью.

Подобную же задачу рассматривал позже Майлс [19], который отметил, что для расчета коэффициента прохождения волн с ошибкой, не превышающей 5 %, достаточно ограничиться учетом только бегущих мод, полностью игнорируя вклад нераспространяющихся мод (при этом ошибка в определении коэффициента отражения может достигать 90 %). Этот вывод был подтвержден

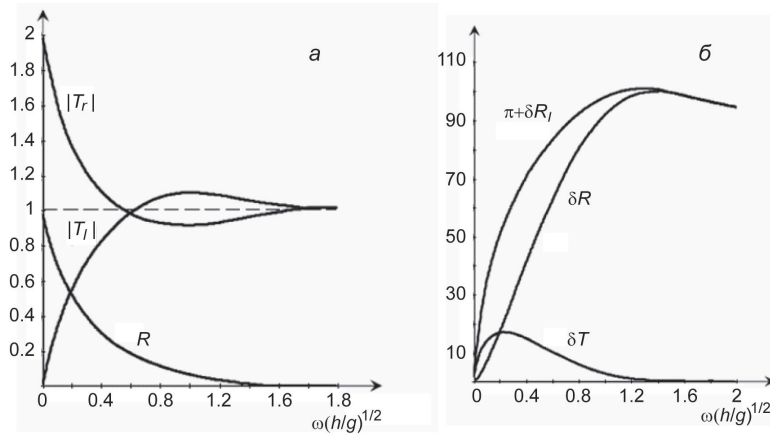


Рис. 3. Коэффициенты трансформации поверхностных волн согласно [9].

a — зависимости коэффициентов прохождения $|T_r|$ и отражения R от нормированной частоты набегающей волны; *б* — зависимости фаз трансформированных волн от нормированной частоты набегающей волны.

затем в работе [15], в которой были выведены явные формулы для коэффициентов трансформации в соответствие с идеей Майлса, но для жидкости конечной глубины по обе стороны от уступа. Эти формулы имеют вид:

$$T = \frac{chk_i h_2}{chk_i h_1} \frac{8k_i k_t (k_i^2 - k_t^2)(2k_i h_1 + \text{sh} 2k_i h_1) \text{sh} k_i (h_1 - h_2)}{(2k_i h_2 + \text{sh} 2k_i h_2)(2k_i h_1 + \text{sh} 2k_i h_1)(k_i^2 - k_t^2)^2 + 16k_i^2 k_t^2 \text{sh}^2 k_i (h_1 - h_2)}, \quad (7)$$

$$R = \frac{1 - K}{1 + K}, \text{ где } K = \frac{\text{sh}^2 k_i (h_2 - h_1)}{(2k_i h_2 + \text{sh} 2k_i h_2)(2k_i h_1 + \text{sh} 2k_i h_1)} \frac{16k_i^2 k_t^2}{(k_i^2 - k_t^2)^2}. \quad (8)$$

В длинноволновом приближении ($k_i, k_t \rightarrow 0$) формулы (7), (8) переходят в известные формулы Лэмба (2).

В работе Нуднера [37] методом Такано (по-видимому, развитым независимо) была рассмотрена задача о прохождении волны над уступом. Коэффициенты трансформации при этом не вычислялись, но были определены возвышения свободной поверхности и давление в любой точке жидкости.

Подход Такано [9, 10] был также использован Масселем [12, 13], который рассмотрел трансформацию волн на подводном препятствии *конечной* протяженности и как частный случай на бесконечно протяженном препятствии, т. е. на подводном уступе. Если длина препятствия конечна, то возникают резонансные эффекты от переотражения волн от его краев. В результате такой интерференции коэффициент отражения как функция длины волны многократно обращается в ноль, что приводит к безотражательному прохождению волн над подводным барьером. Типичный график

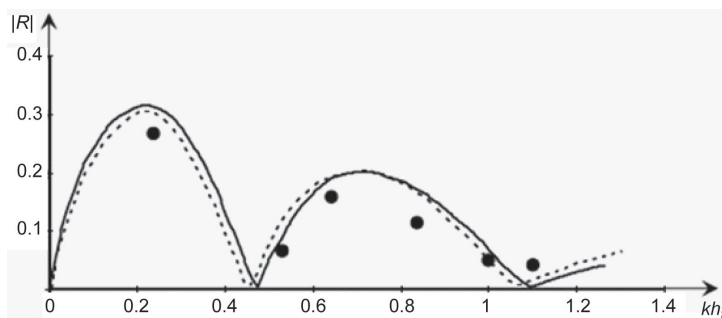


Рис. 4. Типичный график зависимости коэффициента отражения поверхностной волны от подводной ступеньки конечной длины согласно [12].

Здесь $h = 0.3$ м — глубина водоема, $h_i = 0.15$ м — глубина жидкости над препятствием длины 0.6 м. Сплошная линия отражает теоретические результаты Масселя, пунктирна кривая — результаты Мэя и Блэка [18], полученные с помощью вариационного подхода, а точками показаны экспериментальные данные работы [12].

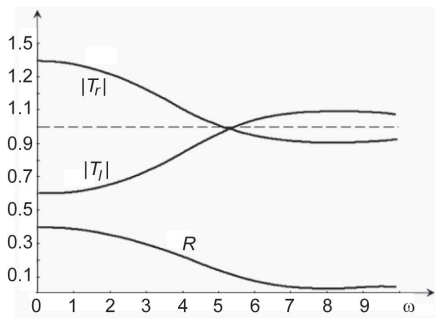


Рис. 5. Зависимости коэффициентов трансформации поверхностных волн от частоты для заданного перепада глубин $h_2/h_1 = 3/16$ согласно [12, 13].

зависимости коэффициента отражения от волнового числа набегающей волны показан на рис. 4.

Рассматривая задачу о трансформации волн на подводном уступе, Массель с помощью численного решения усеченной системы уравнений для коэффициентов возбуждения прижатых мод получил зависимости коэффициентов трансформации от частоты для нескольких фиксированных значений перепада глубин перед уступом и за ним. При этом рассматривалось движение набегающей волны в обоих направлениях слева направо и справа налево. Зависимости коэффициентов трансформации от частоты волны для случая $h_2/h_1 = 3/16$ ($h_1 = 0.8$ м, $h_2 = 0.15$ м) показаны на рис. 5. Как легко видеть, коэффициенты трансформации удовлетворяют условию симметрии (5).

Применение строгого подхода к решению задачи о трансформации линейных поверхностных волн на донном уступе показало, что выражения для коэффициентов трансформации могут быть получены теоретически с любой точностью путем численного решения системы из большого числа линейных алгебраических уравнений. Практическое же применение данного подхода приводит к довольно громоздким вычислениям; при этом иногда возникают ситуации, когда матрица коэффициентов алгебраической системы плохо обусловлена. В этой связи представляется полезным поиск достаточно простых, хотя и приближенных методов расчета коэффициентов трансформации, позволяющих относительно быстро получать и анализировать требуемый результат с контролируемой точностью. Особый интерес представляют случаи, когда коэффициенты трансформации удастся представить аналитическими формулами.

Иной подход к приближенному расчету трансформации поверхностных волн над донным уступом был предложен в работе Маршала и Нагди 1990 г. [20]. Он основан на приближенной теории поверхностных волн Грина—Нагди, которая заключается в представлении поля скорости в виде конечной суммы произведений вертикального и горизонтального профилей течений [21—24]. Как показано в этих работах, процесс расчета динамики поверхностных волн можно значительно упростить, если использовать указанное представление поля скорости. Воспользовавшись ранее разработанной приближенной теорией [21—24], Маршал и Нагди в работе [20] рассмотрели распространение монохроматической волны произвольной длины в бассейне с конечным числом донных препятствий в виде ступенек и вывели следующие формулы для коэффициентов трансформации на одной ступеньке:

$$T = \frac{2k_t}{k_t + k_i}, \quad |R| = \frac{|k_t - k_i|}{k_t + k_i}, \quad (9)$$

где k_t и k_i — волновые числа набегающей и прошедшей волн. При этом k_t определяется из следующего трансцендентного уравнения, выражающего равенство частот волн:

$$k_t \tanh(k_t h_2) = k_i \tanh(k_i h_1). \quad (10)$$

Легко видеть, что в длинноволновом приближении из (10) следует, что отношение квадратов волновых чисел падающей и прошедшей волн равно отношению глубин за уступом и перед ним $(k_t/k_i)^2 = h_2/h_1$; тогда зависимости (9) переходят в формулы Лэмба (2). Однако в своей работе Маршал и Нагди не приводят сравнение полученных ими теоретических результатов с данными каких-либо лабораторных экспериментов или численных расчетов. Далее мы покажем, что точность расчетов по формулам (9) не высока; результаты лишь отчасти согласуются с выводами строгой теории и данными прямых численных расчетов.

В работе [25] были предложены приближенные формулы для расчета коэффициентов трансформации, основанные на формальном использовании формул Лэмба в виде (1), в которых вместо «длинноволновых» скоростей $c_{1,2} = \sqrt{gh_{1,2}}$ использовались фазовые или групповые скорости волн, определяемые из дисперсионного соотношения. Очевидно, что в пределе длинных волн,

когда дисперсия отсутствует, при этом получаются формулы Лэмба. Последующее сравнение с выводами строгой теории и данными прямого численного моделирования показало, что наилучшее согласие для коэффициента прохождения обеспечивается при подстановке групповых скоростей в формулу (1); ошибка при этом не превышает 5.5 % для любых длин волн и перепадов глубин h_2/h_1 . Для коэффициента отражения наилучшее согласие обеспечивается при подстановке фазовых скоростей в формулу (1); однако ошибка расчетов при этом значительно выше, она может достигать 45 %.

Соответствующие формулы для коэффициентов трансформации имеют вид:

$$T_g \equiv \frac{2c_{g1}}{c_{g1} + c_{g2}} = \frac{q \operatorname{th}(qh_2/h_1)}{\kappa} \frac{2}{1 + Q\kappa/q}, \quad |R_p| \equiv \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_{p1} + c_{p2}} = \frac{|q - \kappa|}{q + \kappa}, \quad (11)$$

где $Q = \left[1 + \frac{qh_2 \operatorname{sch}^2(qh_2/h_1)}{h_1 \operatorname{th}(qh_2/h_1)} \right] \left(1 + \kappa \frac{\operatorname{sch}^2 \kappa}{\operatorname{th} \kappa} \right)^{-1}$; $\kappa = k_i h_1$ — безразмерное волновое число падающей волны; $q = k_i h_1$ — безразмерное волновое число прошедшей волны. Эти числа связаны трансцендентным уравнением (10), которое в безразмерной форме принимает вид: $q \operatorname{th}(qh_2/h_1) = \kappa \operatorname{th}(\kappa)$.

Отметим, что формулы Маршала и Нагди (9), по существу, сводятся к тому, что в формулах Лэмба (1) как для коэффициента прохождения, так и для коэффициента отражения производятся замены длинноволновых скоростей фазовыми скоростями волн. В результате коэффициент отражения, как было отмечено выше, оценивается с максимальной ошибкой в 45 % при $|R| > 0.01$, а ошибка в определении коэффициента прохождения может превышать 100 %, что значительно хуже погрешности формул предложенных в [25].

Нелинейные теории. Естественным продолжением исследований трансформации поверхностных волн на донном уступе является учет эффектов нелинейности, связанных с конечностью амплитуд волн. Нелинейные эффекты особенно важны в прошедшей волне, если глубина водоема над уступом уменьшается, например, при набегании волны из открытого океана в зону шельфа. В частности, как показано в монографии Пелиновского [26], при распространении волн цунами в открытом океане эффекты нелинейности являются слабыми, они не успевают накапливаться в планетарном масштабе, однако при выходе волны на шельф, где глубина океана падает в десятки раз, нелинейность становится весьма существенной. Это приводит к увеличению амплитуды прошедшей волны, укручению ее фронта и в некоторых случаях к обрушению волны за уступом. В этой связи большой интерес представляет задача о нелинейной трансформации поверхностных волн на донном уступе с изучением последующей эволюции прошедшей и отраженной волн.

В работе Мирчиной и Пелиновского [27] рассматривалась трансформация нелинейных волн на донном уступе в длинноволновом приближении, когда эффекты дисперсии не существенны. Применяя приближенный подход Лэмба, состоящий в использовании граничных условий сохранения потока жидкости и непрерывности давления над подводным уступом, авторы вывели систему нелинейных уравнения для определения зависимостей амплитуд прошедших и отраженных волн в зависимости от перепада глубин и амплитуды набегающей волны. Полученная система уравнений для амплитуд трансформированных волн в общем виде слишком сложна для анализа, однако в отдельных частных случаях из нее можно получить обозримые результаты. В пределе бесконечно малых амплитуд волн из полученной системы вытекают формулы Лэмба (2). В следующем порядке по амплитуде набегающей волны коэффициенты трансформации принимают вид:

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{A_i}{h_1} T_0^2 \frac{1 + \sqrt{X}}{8\sqrt{X}} \left[3(1 - X) + \frac{(3 - X)\sqrt{X} R_0^2 - 2 R_0}{1 - \sqrt{X}} \frac{R_0}{T_0} \right] \right\},$$

$$R = R_0 \left[1 + \frac{A_i}{h_1} \frac{T_0}{2(\sqrt{X} - 1)} \left(\frac{3 - X}{2} R_0^2 - \frac{1}{\sqrt{X}} \right) \right], \quad (12)$$

где A_i амплитуда набегающей волны, а $X = h_1/h_2$.

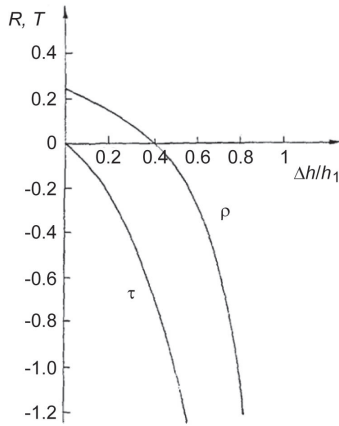


Рис. 6. Зависимости нормированных поправок к формулам Лэмба $\tau \equiv (\Delta T/T_0)/(A_i/h_1)$ и $\rho \equiv (\Delta R/R_0)/(A_i/h_1)$ от относительной высоты уступа $\Delta h/h_1$ согласно [27, 26].

На рис. 6 показаны относительные поправки к формулам Лэмба $\Delta T/T_0 \equiv (T - T_0)/T_0$ и $\Delta R/R_0 \equiv (R - R_0)/T_0$, нормированные на A_i/h_1 , как функции относительной высоты уступа $\Delta h/h_1 \equiv (h_1 - h_2)/h_1 = 1 - 1/X$. Как видно из этих графиков, нелинейность приводит к возрастанию коэффициента отражения волны при $\Delta h/h_1 < 0.4$; при больших значениях $\Delta h/h_1$ поправка к коэффициенту отражения становится отрицательной. Поправка же к коэффициенту прохождения отрицательна при любых значениях $\Delta h/h_1$. При $\Delta h/h_1 \rightarrow 0$, т. е., когда уступ отсутствует, поправка к коэффициенту отражения ΔR исчезает; исчезает, естественно, и сам коэффициент отражения R_0 , но их отношение формально остается конечным $\Delta R/R_0 \approx 0.22$. В другом предельном случае, когда $\Delta h/h_1 \rightarrow 1$, т. е., когда $h_2 \rightarrow 0$, обе поправки, будучи отрицательными, неограниченно возрастают по модулю. Другие подробности трансформации нелинейных волн в длинноволновом приближении можно найти в оригинальной работе авторов [27], а также в монографии [26].

Отметим один существенный момент, связанный с трансформацией нелинейных волн: полученные коэффициенты трансформации имеют смысл лишь в непосредственной близости от края уступа. Поскольку нелинейные волны не являются стационарными, то при удалении от края уступа прошедшая и отраженная волны эволюционируют, укручаются и либо опрокидываются, либо преобразуются в солитоны.

В работе Пелиновского [3], а также в последовавшей работе [28] изучалась трансформация солитона на донном уступе в рамках уравнения Кортевега—де Вриза (КдВ). При этом было показано, что при умеренных амплитудах падающей и прошедшей волн трансформацию на крае уступа можно рассчитывать приближенно по формулам Лэмба (2). При этом все три импульса, падающий, прошедший и отраженный, вблизи края уступа при $x = 0$ имеют одинаковую форму и длительность, изменяется лишь амплитуда импульсов:

$$\eta_i(x, t) = \eta_0 \operatorname{sch}^2 \frac{t\sqrt{3g\eta_0}}{2h_1}, \quad (13)$$

$$\eta_l(x, t) = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} \eta_0 \operatorname{sch}^2 \frac{t\sqrt{3g\eta_0}}{2h_1}, \quad \eta_r(x, t) = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} \eta_0 \operatorname{sch}^2 \frac{t\sqrt{3g\eta_0}}{2h_1}.$$

Здесь η_0 — амплитуда набегающего на уступ солитона.

С учетом формул, выведенных в работе [27], коэффициенты трансформации можно уточнить, учитывая конечность амплитуды набегающего солитона. Сохранение формы импульсов и их длительностей при трансформации солитонов на резком скачке глубины у края уступа нашло подтверждение в последующих численных расчетах [29] и лабораторных экспериментах [30, 31]. После трансформации в прошедшем и отраженном импульсах нарушается баланс между амплитудой и длительностью, характерный для стационарного солитона. В результате этого трансформированные импульсы в процессе распространения эволюционируют, порождая вторичные солитоны, число и параметры которых можно рассчитать с помощью метода обратной задачи рассеяния (см., например, [32]). При этом в отраженной волне возникает только один солитон, если $h_2/h_1 < 1$; если же $h_2/h_1 > 1$, то отраженный импульс имеет отрицательную полярность, эволюционирующий только в нестационарный волновой пакет без солитонов.

Численные исследования трансформации волн на донном уступе. Трансформация уединенных волн подробно исследовалась в работе Пелиновского с соавторами [29]. Как и в более ранних работах [3, 28], авторы использовали линейную теорию для расчета амплитуд трансформированных над уступом волн, используя формулы Лэмба (2). Для подтверждения выводов теории были выполнены расчеты динамики одиночной волны (солитона) в рамках различных численных схем:

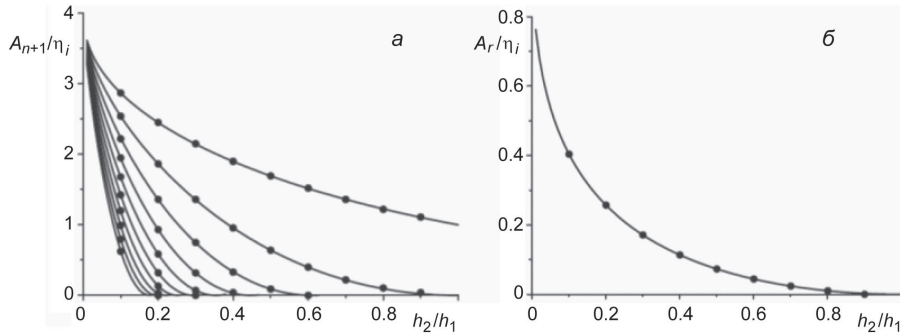


Рис. 7. Зависимости амплитуд вторичных солитонов A_{n+1} в прошедшей волне (а) и в отраженной волне (б), нормированных на амплитуду набегающего солитона η_i , от перепада глубин h_2/h_1 согласно [29]. Сплошные линии — теоретические зависимости, точки — численные данные, полученные в рамках уравнения КдВ.

на основе уравнения КдВ, обобщенного уравнения Буссинеска, а также в рамках полнонелинейной модели Навье—Стокса. Расчеты, выполненные в рамках всех этих схем, показали близкие к теоретическим результаты, как по числу вторичных солитонов, так и в отношении их амплитуд (при этом совпадения по фазам были гораздо хуже из-за неточности в определении скоростей солитонов в рамках приближенных моделей). На рис. 7 из работы [29] показано сравнение теоретических зависимостей с численными данными для амплитуд вторичных солитонов, возникающих в прошедшей волне, от перепада глубин.

Отметим, что максимальное значение амплитуды самого высокого из вторичных солитонов не может превышать амплитуду набегающего солитона более, чем в четыре раза. При этом, как следует из формул Лэмба (2), максимальное усиление амплитуды прошедшей волны по отношению к падающей не может быть больше двух вблизи края уступа. Затем, по мере эволюции трансформированного импульса, из него образуются вторичные солитоны, при этом, согласно теории уравнения КдВ [3, 28], максимальная амплитуда вторичного солитона может превысить амплитуду трансформированного на уступе импульса не более, чем в два раза.

Рис. 7 демонстрирует хорошее согласие теоретических расчетов с численными данными в рамках модели КдВ. Это подтверждает справедливость использования формул Лэмба (2), выведенных в рамках линейной теории длинных волн, для расчета трансформации импульсных возмущений малой, но конечной амплитуды, таких как, например, солитоны КдВ.

Прямое численное моделирование трансформации линейных волн произвольной длины на донном уступе было выполнено лишь совсем недавно в работах [15, 25]. При этом вдали от уступа задавался квазимонохроматический волновой пакет с центральным волновым числом k_i ; во избежание эффектов дисперсии при распространении такого пакета его характерная ширина D выбиралась достаточно большой по сравнению с длиной несущей волны $\lambda_i = 2\pi/k_i \ll D$. Численные расчеты выполнялись с помощью программного комплекса MITgcm, адаптированного для моделирования трансформации поверхностных волн над донным уступом в однородной идеальной жидкости [33—35]. Вид двумерной расчетной области представлен на рис. 1; на всех вертикальных сторонах и на дне использовалось условие непротекания (обращение в ноль нормальной компоненты скорости), а на свободной поверхности — стандартные граничные условия, кинематическое и динамическое [1, 4, 5]. Начальное возмущение задавалось в виде волнового пакета с гауссовой огибающей в области с глубиной h_1 :

$$\eta(x, 0) = A_i \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{D}\right)^2\right] \cos k_i x, \quad (14)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \frac{g}{\omega(k_i)} A_i \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{D}\right)^2\right] \frac{\text{ch}[k_i(h_1 - y)]}{\text{ch} k_i h_1} \sin k_i x. \quad (15)$$

Здесь $\eta(x, t)$ — возмущение свободной поверхности, $\varphi(x, y, t)$ — гидродинамический потенциал скорости, A_i — амплитуда волнового пакета, g — ускорение свободного падения, $\omega(k_i)$ — частота

несущей волны, связанная с волновым числом дисперсионным соотношением: $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kh}$.

Амплитуда начального возмущения выбиралась столь малой, чтобы нелинейные эффекты не проявлялись в расчетной области $A_i = \min\{h_2, h_1\}/500$. Численные расчеты производились для перепадов глубин $0.01 \leq h_2/h_1 \leq 100$, что соответствует как набеганию волн из глубокой области в более мелкую область, так и в обратном направлении. При этом глубина h_1 во всех расчетах задавалась одной и той же $h_1 = 50$ м, а глубина за уступом h_2 варьировалась. Ниже представлены результаты расчетов лишь для трех значений безразмерных волновых чисел $\kappa = \kappa_i h_1 = 0.1, 1$ и 10 , последовательно отличающихся на порядок. Амплитуды прошедшей и отраженной волн определялись на достаточном удалении от уступа так, чтобы не было интерференции с набегающей волной. После этого вычислялись коэффициенты прохождения $|T| = |A/A_i|$ и отражения $|R| = |A_r/A_i|$.

Результаты численного моделирования процесса трансформации для трех указанных волновых чисел представлены на рис. 8.

Как видно из этого рисунка, аппроксимационные формулы (11) хорошо согласуются с данными прямых численных расчетов, причем не только качественно, но и количественно, воспроизводя локальный минимум коэффициента прохождения при $\kappa = 10$ в области $h_2/h_1 < 1$, а также предельные значения T в области $h_2/h_1 > 1$.

Как и следовало ожидать, согласие коэффициентов трансформации волн с формулами Лэмба (2) наблюдается только для достаточно малых значений волновых чисел κ (см., например, ромбики на рис. 8 и кривые 1 для коэффициентов прохождения и отражения для $\kappa = 0.1$). Интересной особенностью коэффициентов трансформации является их немонотонная зависимость от перепада глубин. Вследствие немонотонного характера коэффициента прохождения при достаточно больших значениях κ , он может обращаться в единицу не только при $h_2/h_1 = 1$, когда уступа вовсе нет, но и при некотором значении $h_2/h_1 < 1$ (см. рис. 8), которое зависит от κ . При этом коэффициент отражения не обращается в ноль вторично, а длина прошедшей волны не совпадает с длиной начальной волны, $q \neq \kappa$. Соотношение между волновым числом исходной волны κ^* и перепадом глубин h_2/h_1 , при котором коэффициент прохождения обращается в единицу, может быть получено из условия $T = 1$ совместно с уравнением (10). Ввиду сложности результирующего трансцендентного уравнения оно здесь не приводится; его численное решение представлено на рис. 9.

Для малых значений $h_2/h_1 \ll 1$ зависимость κ^* от h_2/h_1 может быть аппроксимирована простой формулой $\kappa^* = 0.36h_1/h_2$, представленной пунктирной линией в двойном логарифмическом масштабе на рис. 9.

Несколько худшее согласие между аппроксимационными формулами и численными данными наблюдается для коэффициента отражения, особенно при больших значениях κ в области $h_2/h_1 < 1$. Но в целом согласие с численными данными можно признать и в этом случае вполне удовлетворительным.

Лабораторные эксперименты по трансформации волн на донном уступе. По-видимому, первой работой, содержащей сравнение экспериментальных данных по трансформации

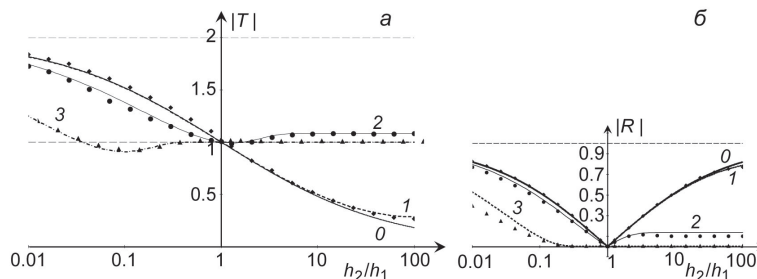


Рис. 8. Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) как функции перепада глубин.

Результаты численных расчетов представлены различными символами: ромбики — $\kappa = 0.1$; точки — $\kappa = 1$; треугольники — $\kappa = 10$; сплошные линии — расчеты по формулам Лэмба (2). Остальные кривые построены по аппроксимационным формулам (11).

поверхностных волн над подводным уступом с теорией, является работа Ньюэна [11], в которой исследовался переход квазимонохроматической волны из бесконечно глубокой области в область конечной глубины (см. раздел 2). Как видно из рис. 10, взятого из этой работы, данные лабораторного эксперимента находятся в хорошем согласии с теоретическими результатами.

В последующих лабораторных экспериментах изучалась лишь трансформация длинных (по сравнению с глубиной бассейна) уединенных волн. Так, в работе [30] авторы приводят результаты большой серии экспериментов, в которых менялась высота подводного уступа и амплитуда набегающей уединенной волны. При этом амплитуды волн в ряде случаев были не малы, так что наблюдались нелинейные эффекты, приводящие даже к обрушению прошедших за уступ волн. Проведенные исследования при малых амплитудах волн продемонстрировали хорошее согласие с теоретическими формулами, полученными в [3]. В частности, в экспериментах при определенном соотношении глубин наблюдалось два и более одиночных импульсов в прошедшей волне, тогда как в отраженной волне образовывался лишь солитон. Кроме того, было отмечено, что число и амплитуды прошедших волн увеличиваются с ростом высоты уступа.

В еще одной работе на эту же тему [31] также рассматривалась трансформация уединенных волн как малой, так и большой амплитуды. При этом подробно изучалась как сама трансформация уединенных волн в непосредственной близости от уступа, так и дальнейшая эволюция прошедших за уступ волн. По наблюдениям авторов работы [31] при подходе волны к подводному уступу амплитуда уединенных волн несколько увеличивается, а в области за уступом наблюдалось понижение уровня свободной поверхности. Вдали от уступа результаты лабораторных экспериментов сравнивались с солитонным решением уравнения КдВ для прошедших импульсов.

Для солитонов малой амплитуды, набегающих на уступ, наблюдалось удовлетворительное согласие с теоретическими предсказаниями, тогда как при больших амплитудах наблюдалось отличие экспериментальных данных от теоретических, а также нестационарная динамика прошедших импульсов вплоть до их обрушения. По накопленным экспериментальным данным была построена диаграмма, определяющая различные режимы трансформации уединенных волн в зависимости от амплитуды начальной волны и от отношения глубин до и после уступа в диапазоне $1.0 < h_2/h_1 \leq 4.3$. При этом отмечено, при каких параметрах происходит распад прошедшего импульса на несколько солитонов, расщепление и обрушение прошедшей волны, почти полное прохождение и, наоборот, полное отражение.

В заключение этого раздела отметим, что процесс трансформации поверхностных волн на донном уступе изучался также экспериментально с помощью моделирования в нелинейных линиях электропередачи [36]. Как было показано в этой работе, в длинноволновом приближении основные уравнения, описывающие распространение сигналов в таких линиях, приводятся к уравнению КдВ. При этом было обнаружено хорошее согласие между экспериментальными данными по трансформации солитона на скачке параметров между двумя участками длинной линии с теоретическими выводами, аналогичными тем, что были получены для волн в мелком водоеме [3, 28].

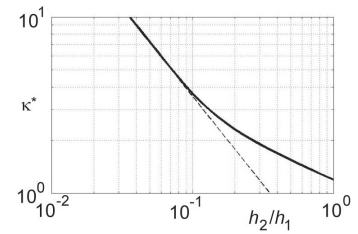


Рис. 9. Зависимость безразмерного волнового числа падающей волны от перепада глубин, когда коэффициент прохождения вторично обращается в ноль.

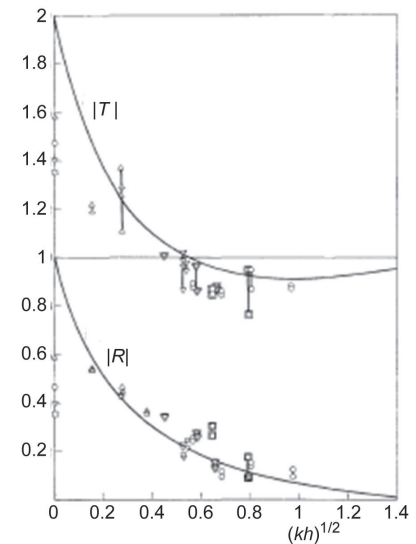


Рис. 10. Зависимость коэффициентов прохождения и отражения волн от безразмерного параметра $(kh)^{1/2}$ [11], где k — волновое число набегающей волны, а h — глубина водоема за уступом.

Различные символы соответствуют различным глубинам h , символы, на вертикальной оси указывают предельные значения коэффициентов трансформации для бесконечно длинных волн согласно формулам Лэмба (2).

Трансформация внутренних волн на донном уступе

Теоретические исследования. Работы по трансформации внутренних волн на донном уступе стали появляться только в самое последнее время. Так в статье [2] были получены обобщения формул Лэмба (2) для случая очень длинных внутренних волн на границе раздела двух слоев жидкости почти равной плотности (в приближении Буссинеска). Для произвольного соотношения плотностей подобные формулы затем были выведены в работе [38]; их можно выразить, как и в случае поверхностных волн, через скорости волн за уступом c_2 и перед ним c_1 (1). При этом в длинноволновом приближении

$$c_{1,2} = \sqrt{\frac{(1-a)gh_0h_{1,2}}{h_0 + ah_{1,2}}}, \quad (16)$$

где h_0 — глубина залегания пикноклина, а $h_{1,2}$ — толщины верхнего и нижнего слоев жидкости.

Исходя из этих формул, можно снова предложить аппроксимационные формулы для коэффициентов трансформации волн произвольной длины [38]. Как показали результаты прямых численных расчетов (об этом подробнее ниже), наилучшая аппроксимация достигается, как и в случае поверхностных волн (см. выше), если в формулах Лэмба для коэффициента прохождения использовать групповые скорости линейных волн, а для коэффициента отражения — фазовые скорости. Результирующие формулы имеют вид:

$$R_0 = \frac{1-Q_r}{1+Q_r}, \quad T_0 = \frac{2}{1+Q_t}, \quad (17)$$

$$\text{где } Q_r = \frac{k_i}{k_t}, \quad Q_t = Q_r \frac{D(k_i h_1, 1, k_t h_0, 1) \cdot D[k_t h_2, E(k_t h_0), k_t h_0, E(k_t h_2)]}{D(k_t h_2, 1, k_t h_0, 1) \cdot D[k_i h_1, E(k_i h_0), k_i h_0, E(k_i h_1)]},$$

$$D(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha \beta \theta \alpha + \delta \theta \gamma, \quad E(\alpha) = 1 + \alpha(\text{cth} \alpha - \text{th} \alpha).$$

При $a \rightarrow 0$ формулы (17) переходят в аппроксимационные формулы (10) для поверхностных волн. Графики зависимостей коэффициентов трансформации от h_2/h_1 хорошо согласуются с результатами численных расчетов. При этом максимальная погрешность коэффициента прохождения не превышает 10 %.

Строгая теория трансформации линейных внутренних волн на донном уступе в двухслойной жидкости до сих пор опубликована не была; недавно полученные результаты содержатся в кандидатской диссертации одного из авторов данной работы [39]. Описание задачи о трансформации линейных внутренних волн над донным уступом проводилось в рамках потенциальной теории в приближении твердой крышки на поверхности. Жидкость в верхнем и нижнем слоях с плотностью ρ_0 и ρ_1 соответственно предполагалась однородной, невязкой и несжимаемой. Путем сшивки решений по обе стороны от уступа с учетом полного набора прижатых к уступу нераспространяющихся мод была получена следующая система уравнений для коэффициентов отражения R_0 и прохождения T_0 внутренних волн (R_n и T_n при $n \geq 1$ представляют собой коэффициенты возбуждения нераспространяющихся мод перед уступом и за ним соответственно):

$$h_1 \geq h_2 : \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{\theta_n} J_{\theta_n \chi_m} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{\chi_n} K_{\chi_n \chi_m} = -\frac{J_{\theta_n \chi_m}}{\theta_0}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} R_n K_{\theta_n \theta_m} + \sum_{n=0}^{\infty} T_n J_{\theta_m \chi_n} = K_{\theta_0 \theta_m}; \end{cases} \quad h_1 \leq h_2 : \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{\theta_n} K_{\theta_n \theta_m} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{\chi_n} J_{\chi_n \theta_m} = -\frac{K_{\theta_0 \theta_m}}{\theta_0}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} R_n J_{\chi_m \theta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} T_n K_{\chi_n \chi_m} = J_{\chi_n \theta_0}. \end{cases} \quad (18)$$

$$J_{\theta_\chi} = \begin{cases} \rho_1 \frac{-\theta \sin \theta (h_1 - h_2)}{(\theta^2 - \chi^2) \sin \theta h_1 \sin \chi h_2}, & \theta \neq \chi, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \text{ctg} \theta h_0 \text{ctg} \chi h_0 + \frac{\text{ctg} \theta h_0}{\chi h_0} \right) + \frac{h_2 \rho_1}{2} \left(1 + \text{ctg} \theta h_1 \text{ctg} \chi h_2 + \frac{\text{ctg} \theta h_1}{\chi h_2} \right), & \theta = \chi; \end{cases}$$

$$J_{\chi_0} = \begin{cases} \rho_1 \frac{-\chi \sin \chi (h_2 - h_1)}{(\chi^2 - \theta^2) \sin \chi h_2 \sin \theta h_1}, & \chi \neq \theta, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \chi h_0 \operatorname{ctg} \theta h_0 + \frac{\operatorname{ctg} \chi h_0}{\theta h_0} \right) + \frac{h_1 \rho_1}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \chi h_2 \operatorname{ctg} \theta h_1 + \frac{\operatorname{ctg} \chi h_2}{\theta h_1} \right), & \chi = \theta; \end{cases}$$

$$K_{\theta_n \theta_m} = \begin{cases} 0, & \theta_n \neq \theta_m, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_m h_0 + \frac{\operatorname{ctg} \theta_m h_0}{\theta_m h_0} \right) + \frac{h_1 \rho_1}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_m h_1 + \frac{\operatorname{ctg} \theta_m h_1}{\theta_m h_1} \right), & \theta_n = \theta_m; \end{cases}$$

$$K_{\chi_n \chi_m} = \begin{cases} 0, & \chi_n \neq \chi_m, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \chi_m h_0 + \frac{\operatorname{ctg} \chi_m h_0}{\chi_m h_0} \right) + \frac{h_2 \rho_1}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \chi_m h_2 + \frac{\operatorname{ctg} \chi_m h_2}{\chi_m h_2} \right), & \chi_n = \chi_m. \end{cases}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots \infty$ — порядковый номер моды из наборов решений трансцендентных уравнений при фиксированной частоте волны ω :

$$\omega^2 = \frac{-g \theta_n (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 \operatorname{ctg} \theta_n h_0 + \rho_1 \operatorname{ctg} \theta_n h_1} = \frac{-g \chi_n (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 \operatorname{ctg} \chi_n h_0 + \rho_1 \operatorname{ctg} \chi_n h_2}, \quad (19)$$

$\theta_n \in \{\theta_0 = ik_p, \theta_1 = k_{11}, \theta_2 = k_{12}, \dots\}$ и $\chi_n \in \{\chi_0 = ik_p, \chi_1 = k_{11}, \chi_2 = k_{12}, \dots\}$.

При выводе системы уравнений (18) было использовано свойство ортогональности функций вертикальной структуры потенциалов течений, возникающих вблизи уступа:

$$Y_{1,n}(z) = \begin{cases} \frac{\cos \theta_n (z - h_0)}{\sin \theta_n h_0}, & \Omega_1^0 : 0 \leq z \leq h_0, \\ -\frac{\cos \theta_n (z + h_1)}{\sin \theta_n h_1}, & \Omega_1^1 : -h_1 \leq z < 0; \end{cases} \quad Y_{2,n}(z) = \begin{cases} \frac{\cos \chi_n (z - h_0)}{\sin \chi_n h_0}, & \Omega_2^0 : 0 \leq z \leq h_0, \\ -\frac{\cos \chi_n (z + h_2)}{\sin \chi_n h_2}, & \Omega_2^1 : -h_2 \leq z < 0. \end{cases}$$

Для бесконечно длинных волн из систем уравнений (18) получаются формулы (1) с выражениями для скоростей (16) [38], которые в приближении Буссинеска сводятся к формулам, выведенным в [37]. В предельном случае очень малой плотности верхнего слоя жидкости $\rho_0 \rightarrow 0$ отсюда следуют формулы Лэмба (2) для поверхностных волн.

Из системы (18) можно получить другой вид приближенных формул для коэффициентов трансформации, если пренебречь вкладом нераспространяющихся мод. Такой подход был впервые предложен Майлсом для поверхностных волн [19] (см. формулы (7), (8)). Мы здесь не приводим эти формулы ввиду их громоздкости. Расчеты показывают, что при определении коэффициента прохождения с их помощью максимальная ошибка не превышает 9 %. Однако с практической точки зрения формулы (17) более удобны, ибо они менее громоздки и обеспечивают несколько большую точность при расчете коэффициента отражения.

Численные расчеты в рамках линейной модели. С целью проверки применимости развитой теории и используемых при этом приближений было выполнено прямое численное моделирование трансформации внутренних волн над донным уступом с использованием упомянутой выше модели MITgcm при отношении плотностей слоев жидкости $a = \rho_0/\rho_1 = 0.9961$. Графики коэффициентов трансформации, вычисленных с помощью системы (18) при полном числе мод $N = 500$ и полученных при численном моделировании представлены на рис. 11 для трех положений границы раздела жидкостей $h_0/h_1 = 0.1, 1, 10$. Как видно из рисунка, результаты численного моделирования хорошо согласуются с решениями строгой задачи.

Учет большого числа нераспространяющихся мод ($N = 500$) позволяет получать решение с высокой точностью, которое можно рассматривать как эталонное. При меньшем числе мод ошибка в расчетах коэффициентов трансформации постепенно начинает сказываться. Так при $N = 150$

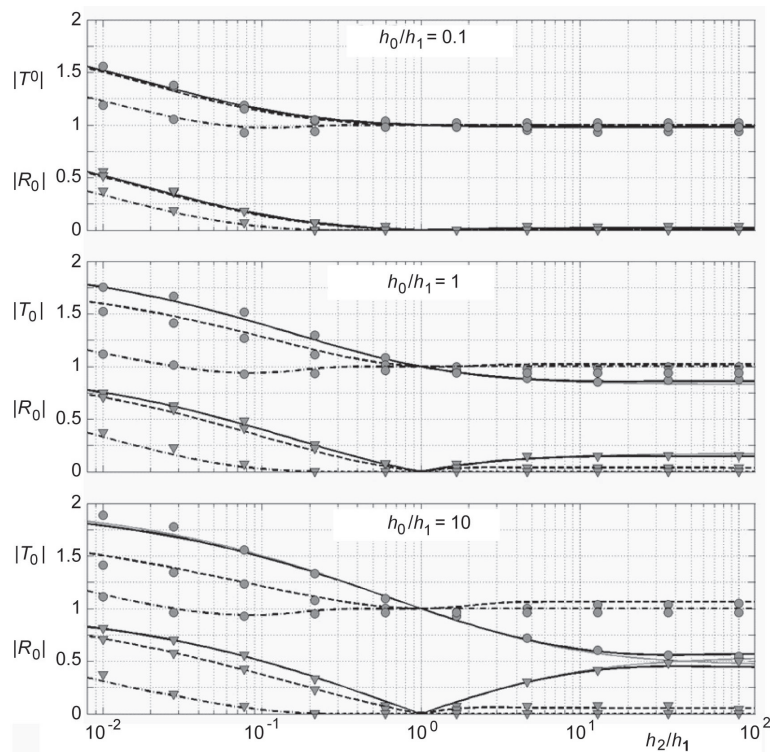


Рис. 11. Графики зависимости коэффициентов прохождения T и отражения R внутренних волн от отношения глубин h_2/h_1 , вычисленные на основе строгого подхода (сплошные линии) и в численной модели (символы \bullet для T и \blacktriangledown для R) при $a = 0.9961$. Формулы Лэмба — серая линия; $\kappa = 0.1$ — черная линия; $\kappa = 1$ — пунктир; $\kappa = 10$ — штрихпунктир.

коэффициент прохождения $|T_0|$ вычисляется уже с ошибкой в 1 %; такая же ошибка для коэффициента отражения $|R_0|$ получается при $N = 400$.

В целом коэффициенты отражения и прохождения внутренних волн имеют те же особенности, что и для поверхностных волн, однако чем ближе граница раздела слоев жидкости располагается к верхней границе, тем менее интенсивно происходит процесс трансформации. Это особенно заметно при $h_0/h_1 = 0.1$ для длинных волн и волн умеренной длины.

Анализ влияния разности плотностей слоев жидкости на коэффициенты трансформации показал, что заметные отклонения от результатов численных расчетов выполненных в приближении Буссинеска наблюдаются только при отношении плотностей $a < 0.6$, когда такое приближение уже заведомо не оправдано. Особенно сильные отклонения проявляются в случае, когда граница раздела слоев жидкостей располагается вблизи твердой крышки ($h_0/h_1 = 0.1$). В случае отношения плотностей $a = 0.0012$, характерного для границы раздела между воздухом и водой, коэффициенты трансформации практически не зависят от положения границы раздела жидкостей и хорошо согласуются с результатами численных расчетов, выполненных для поверхностных волн.

При трансформации внутренних волн также возможен эффект прохождения падающей волны над уступом без изменения ее амплитуды, при этом $|T_0| = 1$, но коэффициент отражения не равен нулю, а длина прошедшей волны не равна длине падающей волны. Этот эффект имеет место при любой глубине залегания границы раздела жидкостей (пикноклина) h_0 .

Изменение характерной ширины огибающей волнового пакета определяется так же, как и для поверхностных волн, с помощью законов сохранения энергии и потока энергии по формуле

$$T_D = \frac{D_t}{D_i} = \frac{1 - |R_0|^2}{|T_0|^2} = \frac{V_{gt}}{V_{gi}}, \quad (20)$$

где D_i и D_t — характерные ширины падающего и прошедшего волновых пакетов соответственно, а V_{gi} и V_{gt} — их групповые скорости. Результаты численных расчетов продемонстрировали хорошее согласие с этой формулой.

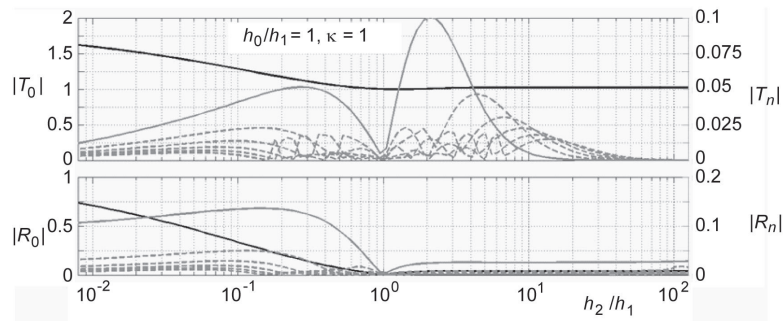


Рис. 12. Коэффициенты трансформации $|R_0|$, $|T_0|$ (черные линии, левая шкала) и возбуждения прижатых мод $|R_n|$, $|T_n|$ внутренних волн при $a = 0.9961$ (сплошные серые линии для $|R_1|$ и $|T_1|$ и пунктир для остальных коэффициентов, правая шкала).

Из решения системы уравнений (18) можно также определить коэффициенты возбуждения распространяющихся мод R_n и T_n для $n = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 12 представлены графики зависимостей R_n и T_n совместно с коэффициентами трансформации R_0 и T_0 от h_2/h_1 для случая $h_0/h_1 = 1$ и $\kappa = 1$, при котором коэффициенты возбуждения принимают максимальные значения. Для внутренних гравитационных волн амплитуды прижатых мод не превышают 15 % от амплитуды падающей волны.

Численные расчеты трансформации уединенных волн. Трансформация внутренних уединенных волн на донном уступе изучалась в работах Пелиновского с соавторами [2, 40, 41]. В статье [2] представлены теоретические расчеты амплитуд вторичных солитонов, возникающих в прошедшей и отраженной волнах вдали от уступа. При этом расчеты проводились в рамках уравнений КдВ и Гарднера (с учетом кубической нелинейности). Численные расчеты, выполненные в рамках этих же модельных уравнений показали хорошее согласие численных и теоретических результатов.

В работе [40] изучалась трансформация уединенных волн отрицательной полярности на донном уступе в двухслойной жидкости в рамках полнонелинейных уравнений. Были описаны различные режимы трансформации, отличающиеся амплитудами набегающих волн. Проведено численное моделирование на основе уравнений Навье—Стокса в приближении Буссинеска. Показано, что процесс трансформации для волн умеренной амплитуды адекватно описывается в рамках модели Гарднера, однако при больших амплитудах следует пользоваться моделью Мияты—Чоя—Камассы (см., [42]). При столь больших амплитудах процесс трансформации сопровождается сдвиговой неустойчивостью и генерацией мелкомасштабных волн на пикноклине, что приводит к его постепенному размытию и утолщению. При большой величине уступа наблюдалось отражение набегающей волны большой амплитуды, сопровождавшееся перемешиванием слоев жидкости. В работе [41] подсчитывался также баланс энергии в волнах. Было выяснено, что потери энергии вблизи уступа вследствие вязкости возрастают с ростом нелинейности падающей волны.

Эти исследования были продолжены в работе [41], в которой изучалась трансформация уединенных волн большой амплитуды положительной и отрицательной полярностей. При этом основное внимание уделялось потерям энергии уединенной волной при взаимодействии с уступом. В частности, было обнаружено, что зависимость потерь энергии от высоты уступа является немонотонной и зависит от полярности уединенной волны. Как показано в работе, результаты численного моделирования согласуются с лабораторными экспериментами.

Как видно из представленных здесь результатов, проблема трансформации поверхностных волн над донным уступом к настоящему времени исследована достаточно хорошо в линейном приближении. Получены коэффициенты трансформации для волн произвольной длины как в рамках строгого подхода, так и с помощью различных приближенных формул. Получены оценки точности тех или иных приближенных подходов и показано хорошее согласие теоретических и численных результатов.

В рамках слабонелинейной теории теоретически решена задача о трансформации солитонов на донном уступе и показано хорошее согласие теоретических результатов с численными и лабораторными для волн малой и умеренной амплитуд.

Трансформация внутренних волн на донном уступе изучена значительно хуже. Теоретически получены результаты для линейных бесконечно длинных волн, тогда как для волн произвольной длины опубликованы лишь данные приближенной теории. Строгая теория будет опубликована в ближайшее время по материалам кандидатской диссертации С. В. Семина [39].

Вместе с тем, теория трансформации внутренних уединенных волн на донном уступе является более развитой. Получены теоретические результаты для солитонов малой и умеренной амплитуды в рамках моделей КДВ и Гарднера, а также численные результаты в рамках полнонелинейных уравнений Навье—Стокса с учетом диссипации энергии [2, 40, 41].

Можно прогнозировать дальнейшее развитие работ в данном направлении с целью учета вращения Земли, трансформации высших мод внутренних волн, сдвиговых течений и других природных факторов.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (Задание № 2014/133 («организация проведения научных исследований») и Задание № 5.30.2014/К).

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 330 с.
2. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Fission of a weakly nonlinear interfacial solitary wave at a step // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 2008. V. 102. P. 179–194.
3. Пелиновский Е. Н. О трансформации одиночной волны на шельфе с горизонтальным дном // Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М.: Наука. 1977. С. 61—63.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 254 с.
5. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
6. Bartolomeusz E. F. The reflection of long waves at a step // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1958. P. 106—118.
7. Germain J. P. Coefficients de reflexion et de transmission en eau peu profonde // *Rozprawy Hydrotechniczne.* 1984. Issue 46. P. 5—13.
8. Крылов Ю. М. Дифракция волн в жидкости // Тр. Гос. океанографического института. 1949. Вып. 18. С. 13—18.
9. Takano K. Effets d'un obstacle parallelepipedique sur la propagation de la houle (The effect of a rectangular obstacle on wave propagation) // *La Houille Blanche.* 1960. V. 15. P. 247—267.
10. Takano K. Effet d'un changement brusque de profondeur sur une houle irrotationnelle // *La mer.* 1967. V. 5. N. 2. P. 100—116.
11. Newman J. N. Propagation of water waves over an infinite step // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 23. Pt. 2. P. 339—415.
12. Massel S. R. Harmonic generation by waves propagating over a submerged step // *Coastal Eng.* 1983. V. 7. P. 357—380.
13. Massel S. R. Hydrodynamics of the coastal zone. Amsterdam: Elsevier, 1989. 95 p.
14. Rey V., Belzons M., Guazzellit E. Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 235. P. 453—479.
15. Куркин А. А., Семин С. В., Степанянц Ю. А. Трансформация поверхностных волн над донным уступом // *Известия РАН. ФАО.* 2015. Т. 51, № 2. С. 242—252.
16. Newman J. N. Propagation of water waves past long two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 23, Pt. 1. P. 23—29.
17. Kreisel J. N. Surface waves // *Quart. Appl. Math.* 1949. V. 7. P. 21.
18. Mei C. C., Black J. L. Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 38. P. 499—511.
19. Miles J. W. Surface-wave scattering matrix for a shelf // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 28, Pt. 4. P. 755—767.
20. Marshal J. S., Naghdi P. M. Wave reflection and Transmission by steps and rectangular obstacles in channels of finite depth // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1990. Issue 1. P. 287—301.
21. Green A. E., Naghdi P. M. Directed fluid sheets // *Proc. Roy. Soc. London. Ser.* 1976. V. 347. P. 447—473.
22. Green A. E., Naghdi P. M. Water waves in a nonhomogeneous incompressible fluid // *J. Appl. Mech.* 1977. V. 44. P. 523—528.
23. Green A. E., Naghdi P. M. A nonlinear theory of water waves for finite and infinite depths // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser.* 1986. V. 320. P. 37—70.
24. Green A. E., Naghdi P. M. Further developments in a nonlinear theory of water waves for finite and infinite depths // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser.* 1987. V. 324. P. 47—72.
25. Giniyatullin A. R., Kurkin A. A., Semin S. V., Stepanyants Y. A. Transformation of narrowband wavetrains of surface gravity waves passing over a bottom step // *Math. Model. Natural Proc.* 2014. V. 9, N. 5. P. 32—41.
26. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
27. Mirchina N. R., Pelinovski E. N. Nonlinear transformation of long waves at a bottom step // *J. Korean Society of Coastal and Ocean Engineers.* 1992. V. 4, N. 3. P. 161—167.
28. Djordjevic V. D., Redekopp L. G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // *J. Phys. Oceanogr.* 1978. V. 8. P. 1016—1024.
29. Pelinovsky E. N. et al. Solitary wave transformation on the underwater step: theory and numerical experiments // *Applied Math Computations.* 2010. V. 217, N. 4. P. 1704—1718.
30. Seabra-Santos F. J., Renouard D. P., Temperville A. M. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 117—134.

31. *Losada M. A., Vidal C., Medina R.* Experimental study of the evolution of a solitary wave at an abrupt junction // *J. Geophys. Res.* 1989. V. 94. P. 14557—14566.
32. *Ablowitz M. J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
33. *Adcroft J.* et al. MITgcm User Manual. MIT Department of EAPS. 2008. 464 p.
34. *Marshall J.* et al. A finite-volume, incompressible Navier-Stokes model for studies of the ocean on parallel computers // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. P. 5753—5766.
35. *Marshall J.* et al. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and non-hydrostatic ocean modeling // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. P. 5733—5752.
36. *Степанянц Ю. А.* О распространении солитона в неоднородной длинной линии // *Радиотехника и электроника.* 1977. Т. 22, № 5. С. 995—1002.
37. *Худнер И. С.* Деформация волн прямоугольным уступом // *Труды коорд. совещ. по гидротехнике.* Л.: ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. 1973. Вып. 84. P. 75—80.
38. *Churaev E. N., Semin S. V., Stepanyants Y. A.* Transformation of internal waves passing over a bottom step // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 368. P. R3-1—R3-11.
39. *Семин С. В.* Трансформация поверхностных и внутренних волн над донным уступом. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева. Нижний Новгород, 2015. 146 с.
40. *Maderich V.* et al. Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step // *Phys. Fluids.* 2010. V. 22. P. 076602.
41. *Talipova T.* et al. Internal solitary wave transformation over a bottom step: Loss of energy // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25. P. 032110.
42. *Apel J., Ostrovsky L. A., Stepanyants Y. A., Lynch J. F.* Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121. N. 2. P. 695—722.

Статья поступила в редакцию 05.05.2015 г.